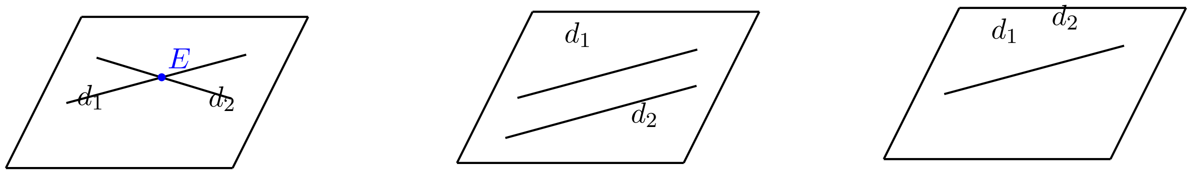
Chapitre **Géométrie dans l'espace**

1 Droites et plans de l'espace

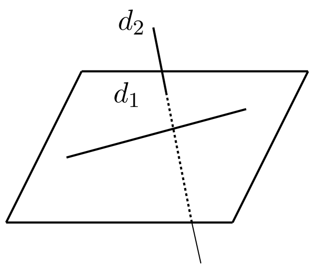
1.1 Positions relatives de droites et de plans dans l'espace

Propriété : Deux droites de l'espace sont : soit coplanaires soit non coplanaires.

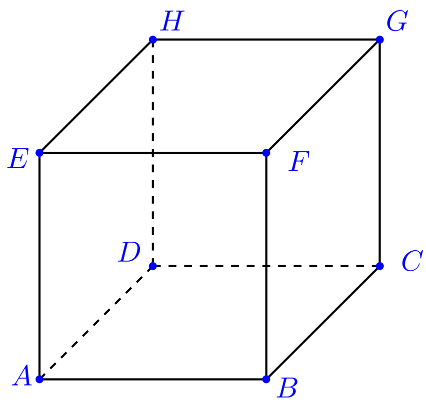
Deux droites coplanaires :



Deux droites non coplanaires



Exemples :



ABCDEFGH est un cube.

- Les droites (EG) et (GC) sont
- Les droites (AD) et (GF) sont
- Les droites (AD) et (GC) sont
- Les droites (EC) et (GA) sont
- Les droites (AC) et (DF) sont

Propriété :

Trois points non alignés ou deux droites sécantes permettent de définir un plan.
Exemples sur le cube précédent :

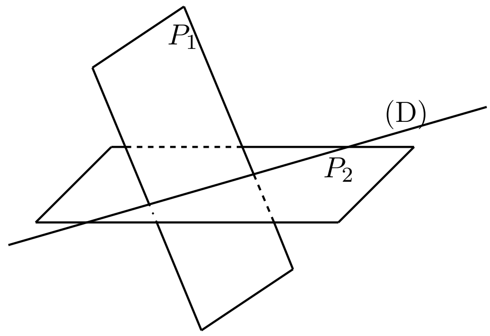
Les points E, B, G sont non alignés et forment un plan. Il peut se nommer plan (EBG).

Les droites (EC) et (DC) sont sécantes en C et forment un plan, le plan (EDC). Le point F fait partie de ce plan.

Propriété :

Deux plans sont : soit sécants (suivant une droite) soit parallèles.

Deux plans sécants P_1 et P_2 suivant une droite (D) :



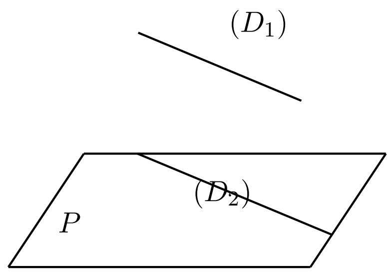
Deux plans sont parallèles s'ils n'ont pas de point commun ou s'ils sont confondus.

Exemple dans le cube

Les deux plans (ABC) et (EFG) sont parallèles.

1.2 Droite parallèle à un plan

Propriété : Si une droite (D_1) est parallèle à une droite (D_2) du plan (P) alors (D_1) est parallèle au plan (P).



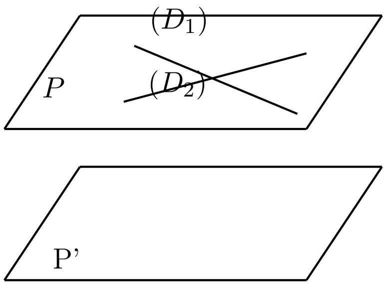
Preuve :
Si (D_1) est dans (P) la preuve est immédiate.
Si (D_1) n'est pas dans (P), montrons le résultat par contraposée. Supposons que (D_1) coupe (P) au point A.
Appelons (d) la parallèle à (D_2) passant par A et contenue dans le plan (P).

On a : (d) $\parallel$ (D_2) et (D_2) $\parallel$ (D_1) donc (d) $\parallel$ (D_1). De plus A est commun aux deux droites (d) et (D_1). Donc ces deux droites sont confondues. Or (d) est contenue dans le plan (P). Donc (D_1) aussi ce qui est contraire à l'hypothèse.

Remarque : La réciproque est évidente. En effet Si la droite (D_1) est parallèle au plan (P) alors tout plan qui contient (D_1) et qui coupe le plan (P) le fera suivant une droite (D_2) qui est parallèle à (D_1).

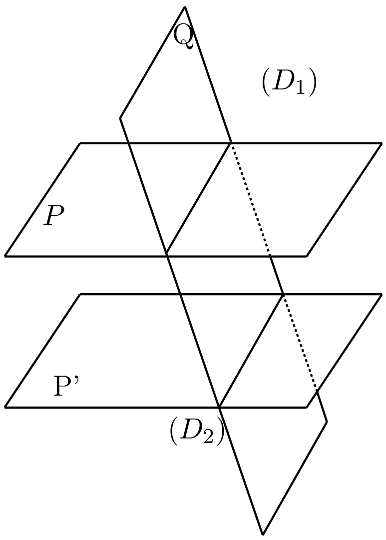
1.3 Plan parallèle à un plan

Propriété : Si un plan (P) contient deux droites sécantes et parallèles à un plan (P'), alors les plans (P) et (P') sont parallèles.



Propriété : Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

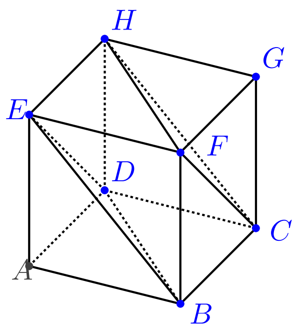
Le plan (Q) coupe les deux plans parallèles (P) et (P') suivant les droites (D_1) et (D_2) qui sont parallèles.



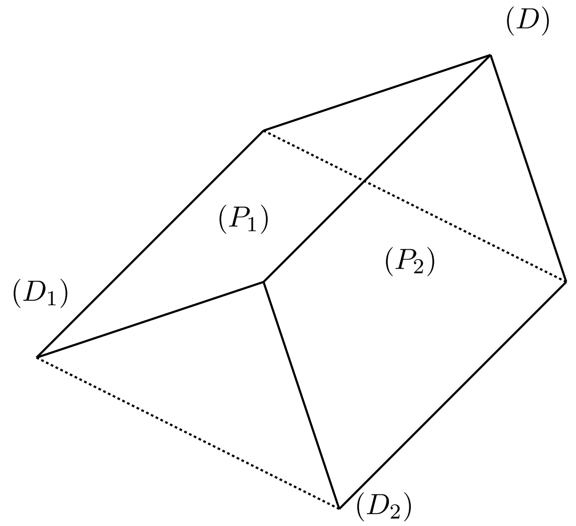
Exemple :

ABCDEFGH est un cube.

Montrer que les plans (BDE) et (CFH) sont parallèles.



Théorème du toit : (D_1) et (D_2) sont deux droites parallèles. (D_1) est contenue dans le plan (P_1) et (D_2) contenue dans le plan (P_2).
Si les deux plans (P_1) et (P_2) se coupent suivant une droite (D) alors les droites (D_1) , (D_2) et (D) sont parallèles.



Démonstration : Elle se fait par l'absurde.

On considère que les droites (D_1) et (D_2) sont strictement parallèles (donc pas confondues).

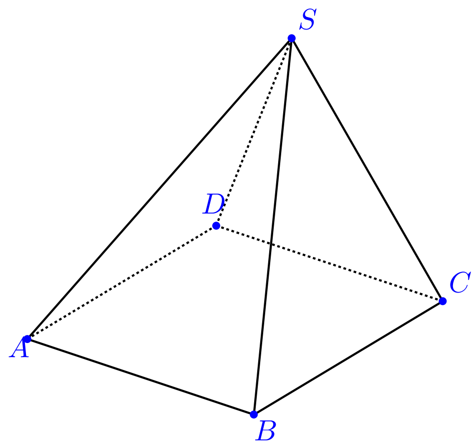
On suppose que la droite (D_1) contenue dans (P_1) coupe la droite (D), intersection des deux plans (P_1) et (P_2), au point A.

Le point A fait partie du plan (P_2) car il est sur la droite (D) commune aux deux plans. Or la droite (D_1) qui est parallèle à la droite (D_2) qui est contenue dans le plan (P_2) est alors parallèle au plan (P_2) et elle passe par un point du plan (P_2). Elle est donc contenue dans le plan (P_2). Elle fait partie aussi du plan (P_1) ; donc elle est confondue avec la droite (D) ce qui est absurde puisque ces deux droites n'ont que le point A en commun.

Exemple d'utilisation de ce théorème

SABCD est une pyramide à base carrée.

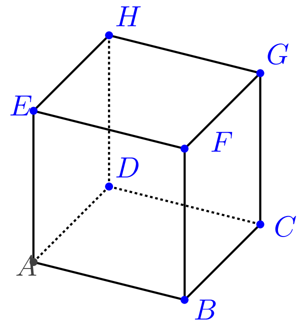
1. Déterminer la droite d'intersection des plans (ADS) et (BCS).
2. Placer les points I et J milieux respectifs des segments [SB] et [SC]. Placer K un point de la face (ADS). Montrer que les plans (IJK) et (ADS) se coupent suivant une droite parallèle à (AD).
3. Déduire de la question précédente la section de la pyramide par le plan (IJK). Préciser la nature du polygone obtenu.



1.4 Orthogonalité de deux droites

Deux droites sont orthogonales dans l'espace si leurs parallèles respectives menées par un point quelconque de l'espace sont perpendiculaires.

Exemple sur le cube ABCDEFGH



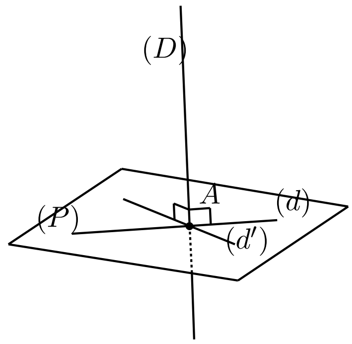
— (HE) et (EF) sont orthogonales car elles sont coplanaires et dans le plan (EFH) elles sont perpendiculaires.
— (FG) et (AE) sont orthogonales car si on mène la parallèle à (AE) passant par F, c'est à dire la droite (FB), cette dernière est perpendiculaire à la droite (FG) dans le plan (BFG).

Remarque : Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires.

1.5 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition : Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à toutes les droites du plan.

Théorème : Pour qu'une droite soit orthogonale à un plan P, il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes du plan P.

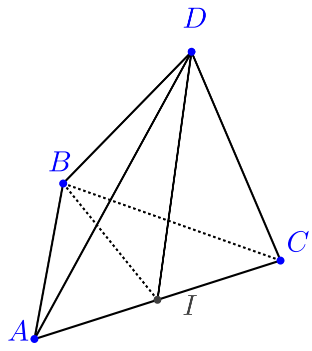


Remarque : la démonstration se fait facilement avec les vecteurs.

Exemple :

ABCD est un tétraèdre régulier (tous les côtés ont même longueur). I est milieu du segment [AC].

1. Montrer que la droite (AC) est orthogonale au plan (IBD).
2. Qu'en déduire pour les droites (AC) et (BD) ?



Perpendicularité de deux plans

Définition : Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un d'eux contient une droite orthogonale à l'autre.

2 Vecteurs dans l'espace

2.1 plan et vecteurs dans l'espace

Définitions :
— Un vecteur de l'espace est défini par une direction dans l'espace, un sens et une longueur (norme du vecteur).

— Le produit d'un réel k par un vecteur $\vec{u}$ se définit comme dans le plan par un vecteur $k\vec{u}$ colinéaire à $\vec{u}$.

Propriétés :

— $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si ABDC est un parallélogramme.

— La somme des vecteurs dans l'espace suit les mêmes règles que dans le plan. La relation de Chasles reste valable.

— Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si il existe un réel k tel que : $\vec{v} = k\ \vec{u}$.

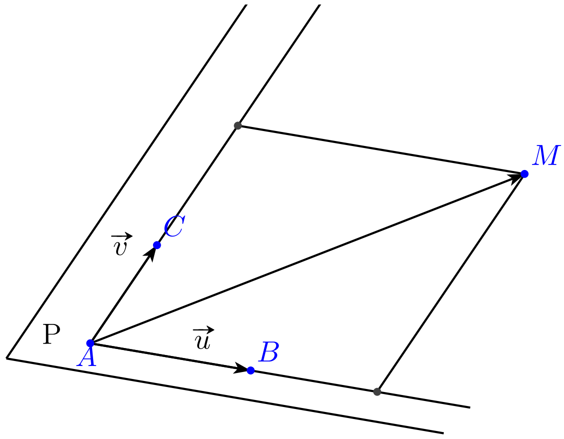
Caractérisation d'un plan dans l'espace :

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ où x et y sont des réels est le plan (ABC) où $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs du plan (ABC). Le plan (ABC) a pour repère (A,$\vec{u}$,$\vec{v}$).

On dit : $x\vec{u} + y\vec{v}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Remarque : Cette caractérisation d'un plan est équivalente à la caractérisation du plan par deux droites sécantes.

Popriété : Deux plans définis par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

Popriété : Une droite D et un plan P sont parallèles si un vecteur directeur $\vec{u}$ de D peut s'écrire comme combinaison linéaire d'un couple de vecteurs directeurs ($\vec{v}$, $\vec{w}$) du plan P.

2.2 Vecteurs coplanaires et non coplanaires

Définition : Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont coplanaires s'ils existent trois réels a, b, c non tous nuls tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$.

Conséquence : Si trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont coplanaires alors l'un d'entre eux peut s'écrire à l'aide des deux autres : $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ donne $a\vec{u} = -b\vec{v} - c\vec{w}$ et si $a \neq 0$ alors

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}.$$

On dit que le vecteur $\vec{w}$ se décompose à l'aide des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

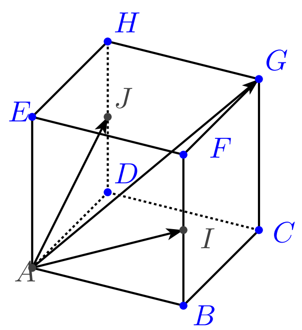
Remarque : Si on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$, on obtient $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ce qui traduit le fait que le point D appartient au plan formé par A, B, C si les trois points ne sont pas alignés sinon les quatre points sont alignés.

Exemple :

ABCDEFGH un cube et I milieu du segment [BF] et J milieu du segment [DH].

Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont coplanaires.

Qu'en déduire pour les points A, I, J, G ?



Remarque : Si trois vecteurs sont non coplanaires aucun d'entre eux ne peut s'exprimer comme combinaison linéaire des deux autres.

Sur le cube précédent, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires. En effet les trois points non alignés A, B , D forment un plan et le point E n'est pas dans ce plan.

Aucun de ces vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ ou $\overrightarrow{AE}$ ne peut s'exprimer comme combinaison linéaire des deux autres.

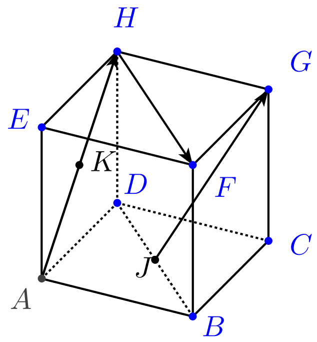
Exercice :

Sur le cube précédent,

1. Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont-ils coplanaires ?
2. Les vecteurs $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont-ils coplanaires ?

Exercice :

ABCDEFGH un cube et J milieu du segment [BD] et K milieu du segment [AH].

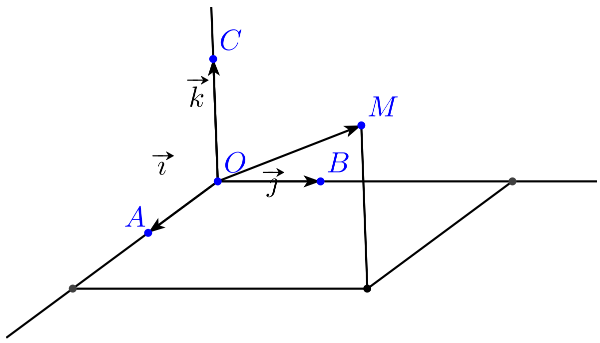


1. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{JG}$ sont coplanaires.
2. En déduire qu'il existe une droite unique contenue dans le plan (AHF) qui soit parallèle à la droite (JG) et passe par K.
3. Déterminer le point d'intersection L de cette droite avec le segment [HF].

2.3 Repère de l'espace

Définition :
Soit O un point de l'espace et $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires.

Le quadruplet $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est un repère de l'espace.

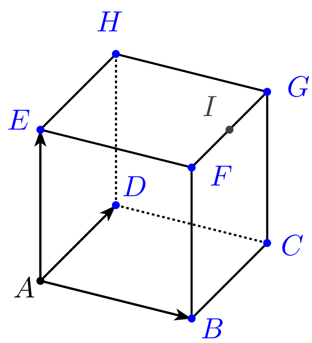


Pour tout point M de l'espace, il existe trois réels a, b et c tels que $\overrightarrow{OM} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$.

Les trois réels (a, b, c) s'appellent les coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Remarque : Les trois réels (a, b, c) sont aussi les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le repère de vecteurs $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Exemple :
Le repère de l'espace est $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

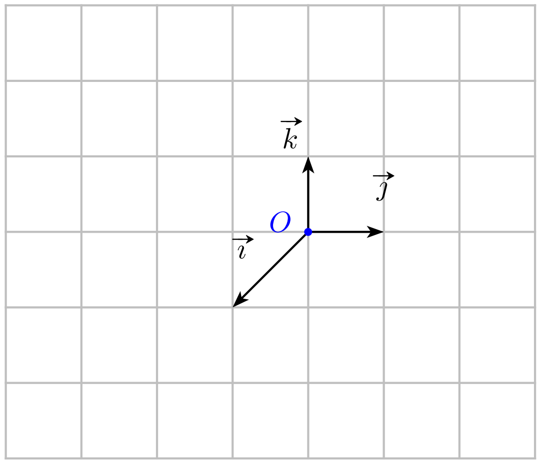


Dans ce repère, le point B a pour coordonnées (1,0,0) car $\overrightarrow{AB} = 1\,\overrightarrow{AB} + 0\,\overrightarrow{AD} + 0\,\overrightarrow{AE}$.

Dans ce repère, le point G a pour coordonnées (1,1,1) car $\overrightarrow{AG} = 1\,\overrightarrow{AB} + 1\,\overrightarrow{AD} + 1\,\overrightarrow{AE}$.

Dans ce repère, quelles sont les coordonnées du point I milieu du segment [FG] ?

Exercice :



$\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ est un repère de l'espace.

Placer les points A, B, C de coordonnées A(1,2,0) B(0,2,−1) et C(2,−1,1).

Propriétés sur les coordonnées dans l'espace
L'espace est muni d'un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

1. Si les coordonnées de A et B sont A(x_A , y_A , z_A) et B(x_B , y_B , z_B) alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
2. Les coordonnées du milieu K du segment [AB] sont : K $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\ ,\ \dfrac{y_A + y_B}{2}\ \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.
3. Les coordonnées du centre de gravité, G, du triangle ABC sont :
G $\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}\ ,\ \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}\ \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$.
4. Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$ et pour tout réel k, $\quad k\ \vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$

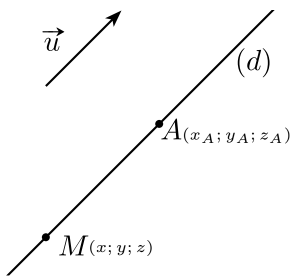
2.4 Système d'équations paramétriques ou représentation paramétrique d'une droite de l'espace

1. Théorème :
Soit (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$ passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$.
$M(x, y; z) \in (d) \iff$ il existe un réel $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_A + k \times a \\ y = y_A + k \times b \\ z = z_A + k \times c \end{array}\right. \quad \text{où } k \text{ est un réel dépendant de } M\text{, appelé paramètre.}$$

Démonstration :

$M \in (d) \iff \vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires $\iff \overrightarrow{AM} = k\vec{u}$.
Avec les coordonnées, on a :
$\vec{u}(a; b; c)$ et $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A; z - z_A)$.
$\overrightarrow{AM} = k\vec{u} \iff \left\{\begin{array}{l} x - x_A = k \times a \\ y - y_A = k \times b \\ z - z_A = k \times c \end{array}\right.$
Donc $M \in (d) \iff \left\{\begin{array}{l} x = k \times a + x_A \\ y = k \times b + y_A \\ z = k \times c + z_A \end{array}\right.$ Ce système est une représentation paramétrique de la droite (d).



2. Exemple :
On donne les coordonnées des points A et B : $A(5; -1; 1)$ et $B(4; 2; 2)$.

 page 8 page 8

On demande de déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

Solution :
$M(x;y;z) \in (AB) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ avec k réel quelconque.
Les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ sont : $\overrightarrow{AM}(x-5;y+1;z-1)$ et celles de $\overrightarrow{AB}$ sont : $\overrightarrow{AB}(4-5;2-(-1);2-1)$ c'est à dire $\overrightarrow{AB}(-1;3;1)$.

$M(x;y;z) \in (AB) \Longleftrightarrow \begin{cases} x-5 = (-1)k \\ y+1 = 3k \\ z-1 = k \end{cases}$ avec k dans $\mathbb{R}$.

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est : $\begin{cases} x = 5-k \\ y = -1+3k \\ z = 1+k \end{cases}$ avec k dans $\mathbb{R}$.

3. Utilisation de la représentation paramétrique d'une droite :

a) On reprend les données de l'exemple ci-dessus. Le point R de coordonnées $R(3;5;2)$ est-il un point de la droite (AB) ?
Solution :
On remplace x , y et z par les coordonnées du point R dans la représentation paramétrique de (AB) et on cherche s'il existe une valeur de k pour laquelle les trois égalités sont vérifiées.
$\begin{cases} 3 = 5-k \\ 5 = -1+3k \\ 2 = 1+k \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 2 \\ k = 1 \end{cases}$
On ne trouve pas la même valeur pour k pour les trois égalités donc R n'est pas un point de la droite (AB).

b) On donne une représentation paramétrique de la droite (d') : $\begin{cases} x = 2+1,5k \\ y = -4,5k \\ z = -3-1,5k \end{cases}$ k dans $\mathbb{R}$.
Les droites (d') et (AB) sont-elles parallèles ?
Solution :
Il suffit de déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de chacune des droites et de savoir si ces vecteurs sont colinéaires c'est à dire si leurs coordonnées sont proportionnelles.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) ; ces coordonnées sont $\overrightarrow{AB}(-1;3;1)$.
Un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (d') a pour coordonnées $\vec{u}(1,5;-4,5;-1,5)$.
Le tableau formé des coordonnées de ces vecteurs est un tableau de proportionnalité :

-1	3	1
1,5	-4,5	-1,5

Le coefficient de proportionnalité est $-1,5$. Les vecteurs directeurs de chacune des droites sont colinéaires. Donc les droites (AB) et (d') sont parallèles.

4. Remarque : Une même droite a une infinité de représentation paramétrique.

Par exemple si la droite (d) a pour représentation paramétrique ce système : $\begin{cases} x = 1+3k \\ y = -2k \\ z = -2+5k \end{cases}$ k dans $\mathbb{R}$

On peut donner une autre représentation paramétrique de (d) en effectuant un changement de paramètre par exemple : $k = t-2$ et en remplaçant dans le système, on obtient : $\begin{cases} x = 1+3(t-2) \\ y = -2(t-2) \\ z = -2+5(t-2) \end{cases}$ t dans $\mathbb{R}$

Ce qui donne : $\begin{cases} x = -5+3t \\ y = 4-2t \\ z = -12+5t \end{cases}$ t dans $\mathbb{R}$
Tout changement de paramètre de la forme $t = a \times k + b$, où $a \neq 0$ et b sont des réels quelconques, convient.

5. Droites coplanaires, droites non coplanaires :

Rappel :
Deux droites (d_1) et (d_2) sont coplanaires si (d_1) et (d_2) sont parallèles ou bien si (d_1) et (d_2) sont sécantes.

Pour savoir si deux droites sont coplanaires, on vérifie si les vecteurs directeurs de chacune des droites sont colinéaires ou pas.

— S'ils sont colinéaires, les droites sont parallèles et donc coplanaires.

— S'ils ne sont pas colinéaires, on résout un système formé par les deux équations paramétriques comme le montre l'exemple ci-après.

Exemple : Les deux droites (d_1) et (d_2) de représentations paramétriques respectives : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1+2t \\ y &=& 2-3t \\ z &=& t \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3t \\ y &=& t+2 \\ z &=& -2+3t \end{array}\right.$, avec $t \in \mathbb{R}$, sont-elles coplanaires ?

Solution :
$\overrightarrow{u_1}(2;-3;1)$ est un vecteur directeur de la droite (d_1) et $\overrightarrow{u_2}(3;1;3)$ est un vecteur directeur de la droite (d_2). Les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles. Donc les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.

On cherche si les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes. Tout point $M(x;y;z)$ commun aux deux droites a des coordonnées qui vérifient les deux systèmes d'équations paramétriques à la fois. On résout donc le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -1+2t &=& 3t' \\ 2-3t &=& t'+2 \\ t &=& -2+3t' \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -1+2(-2+3t') &=& 3t' \\ 2-3(-2+3t') &=& t'+2 \\ t &=& -2+3t' \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -5+6t' &=& 3t' \\ 8-9t' &=& t'+2 \\ t &=& -2+3t' \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3t' &=& 5 \\ 10t' &=& 6 \\ t &=& -2+3t' \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} t' &=& \dfrac{5}{3} \\ t' &=& \dfrac{3}{5} \\ t &=& -2+3t' \end{array}\right.$$

Le système est impossible car t' ne peut pas être égal à deux valeurs différentes dans le système. Il n'y a pas de point commun entre les deux droites.

Conclusion : Les deux droites ne sont pas parallèles et n'ont pas de point commun ; Donc elles sont non coplanaires.

3 Produit scalaire dans l'espace

1. Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Il existe trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
   Il existe un plan qui contient A, B et C. Dans ce plan, on a $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ où le produit scalaire est celui défini précédemment dans le plan.

   Le produit scalaire de deux vecteurs ne dépend pas des représentants de vecteurs choisis car parmi les quatre définitions équivalentes du produit scalaire l'une d'entre elles utilise les normes (longueurs) des vecteurs ; Or la norme ne dépend pas du représentant choisi.

   Rappels des définitions :

a) Avec normes $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2)$.

b) Avec cosinus $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AC}|| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

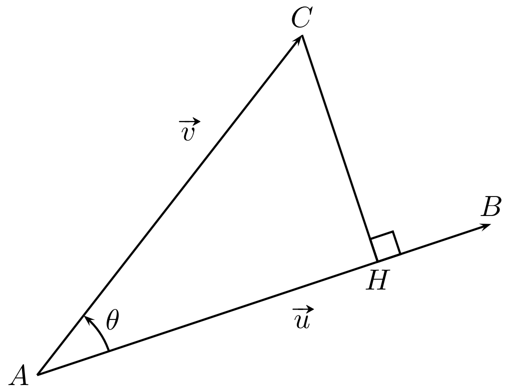
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\theta)$.

c) Avec projeté orthogonal $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

d) Avec coordonnées En repère orthonormal de l'espace $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$, on a :

$\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

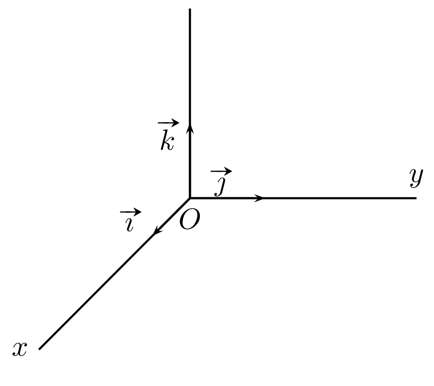


2. Propriétés sans coordonnées :

   a) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
   b) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
   c) $(k\vec{u}).\vec{v} = k \times (\vec{u}.\vec{v})$ où k est un réel quelconque.
   d) Carré scalaire :
   $\vec{u}.\vec{u} = OM^2 = ||\vec{u}||^2$ où $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
   e) Calcul de $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})$
   $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = ||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + ||\vec{v}||^2$.
   f) $|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}| = AB \times AC \iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires c'est à dire A, B, C alignés.
   g) $(AB) \perp (AC) \iff \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$.

3. Définition : Un repère de l'espace $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$ est dit orthonormal si :

   - $||\vec{\imath}|| = ||\vec{\jmath}|| = ||\vec{k}|| = 1$
   - $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = 0$ et $\vec{\imath}.\vec{k} = 0$ et $\vec{k}.\vec{\jmath} = 0$



Propriétés avec coordonnées :

En repère orthonormal de l'espace $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$, on a :

- $\vec{u}(x,y,z)$ alors : $\quad ||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

- A $(x_A\ ,\ y_A\ ,\ z_A)$ et B $((x_B\ ,\ y_B\ ,\ z_B)$ alors AB $= \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

4. Exemples d'utilisation du produit scalaire :

a) Angles d'un tétraèdre :

$ABCD$ est un tétraèdre régulier de côté a. Ceci signifie que toutes les arêtes ont la même longueur a. On va chercher la valeur de l'angle $\widehat{DCI}$.

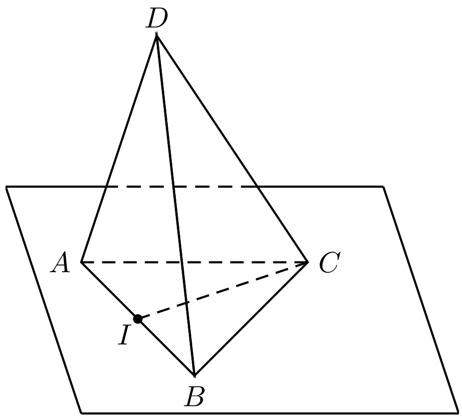
Pour cela, on calcule le produit scalaire $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CI}$ de deux façons différentes.

1°façon : On sait que $\overrightarrow{CI} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$.

On remplace dans le calcul ce qui donne :

$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CD}\cdot\left(\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})\right) = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$.

$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CI} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB}\right)$



CAD est un triangle équilatéral. Donc les angles valent $\dfrac{\pi}{3}$ radians chacun.

$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA} = CD\times CA\times\cos(\dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{a^2}{2}$.

$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB} = CD\times CB\times\cos(\dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{a^2}{2}$.

Donc $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CI} = \dfrac{a^2}{2}$.

2°façon : Avec le théorème de Pythagore, on a : $CI = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CI} = CD\times CI\cos(\widehat{DCI}) = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}\cos(\widehat{DCI})$.

Les deux calculs doivent donner le même résultat,

donc $\quad \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}\cos(\widehat{DCI}) = \dfrac{a^2}{2}$.

Donc $\cos(\widehat{DCI}) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Donc $\boxed{\widehat{DCI}\simeq 55^\circ}$.

b) Droite et plan dans le cube :

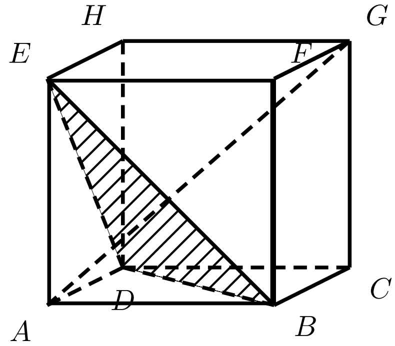
$ABCDEFGH$ est un cube. Il s'agit de montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BED).

Rappel :

Définition : Une droite (d) est orthogonale à un plan (P) si elle est orthogonale à toutes les droites du plan (P).

Propriété : Une droite (d) est orthogonale à un plan (P) si et seulement si (d) est orthogonale à deux droites sécantes de (P).

On utilise le repère orthonormal $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ dans lequel les points A, B, D, E, G ont pour coordonnées $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$ et $G(1,1,1)$.
On montre avec des vecteurs que $(AG) \perp (BE)$ et $(AG) \perp (ED)$ avec (BE) et (ED) sécantes.



$\overrightarrow{AG}(1;1;1)$ et $\overrightarrow{BE}(-1;0;1)$ et $\overrightarrow{ED}(0;1;-1)$.

$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 1 = -1 + 1 = 0$ donc $(AG) \perp (BE)$.

$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{ED} = 1 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 1 - 1 = 0$ donc $(AG) \perp (ED)$.

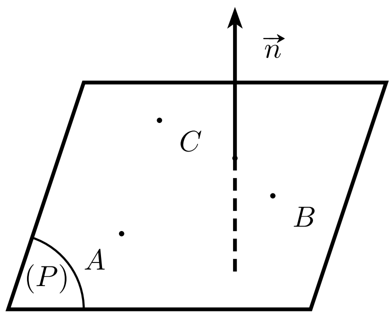
Donc $(AG) \perp (BED)$.

4 Equation cartésienne d'un plan dans l'espace

Rappel : Un plan est défini par trois points non alignés.

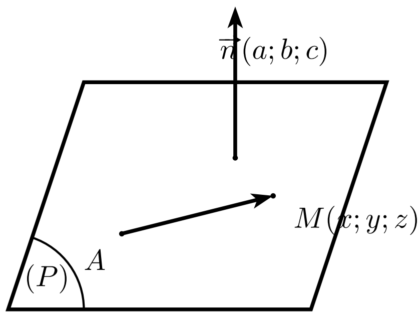
1. Définition :

Le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (P) si $\vec{n}$ est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à (P).



2. Équation cartésienne d'un plan :
Tout plan (P) de l'espace possède une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où $(a;b;c)$ sont les coordonnées d'un vecteur normal à (P).

Démonstration :
Soit (P) un plan contenant le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n}(a;b;c)$.
$M(x;y;z) \in (P) \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$
Or $\overrightarrow{AM}(x_M - x_A; y_M - y_A; z_M - z_A)$ donc :
$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$
$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$ c'est à dire $ax + by + cz + d = 0$ où $d = -ax_A - by_A - cz_A$.



3. Exemple :
Déterminer une équation cartésienne du plan (DBE) du cube précédent.

Solution :
On a vu que le vecteur $\overrightarrow{AG}(1;1;1)$ est un vecteur normal au plan (DBE). Donc le plan (DBE) a une équation de la forme $1x + 1y + 1z + d = 0$. Il reste à déterminer d en remplaçant x, y et z par les coordonnées du point B par exemple.
$1 + 0 + 0 + d = 0$ donc $d = -1$.
Une équation cartésienne du plan (DBE) est donc $\boxed{x + y + z - 1 = 0}$.

4.1 Droite définie par deux plans sécants

Exemple : On donne deux plans (P) et (Q) par leurs équations respectives : $(P) : x+y-z=1$ et $(Q) : 3x+2y+z=4$.
La question est de savoir si les deux plans sont sécants ou pas. S'ils sont sécants, l'intersection se fait suivant une droite dont on cherchera une représentation paramétrique. S'ils ne sont pas sécants, ils sont parallèles c'est à dire confondus ou sans point commun.
On utilise les vecteurs normaux à ces plans.
Le vecteur $\overrightarrow{n_1}(1;1;-1)$ est un vecteur normal à (P) et le vecteur $\overrightarrow{n_2}(3;2;1)$ est un vecteur normal à (Q).

$$\overrightarrow{n_1} \text{ et } \overrightarrow{n_2} \text{ sont colinéaires} \iff (P) \text{ et } (Q) \text{ sont parallèles.}$$

Or ici, dans cet exemple, les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles). Donc les plans (P) et (Q) sont sécants.
On cherche une représentation paramétrique de la droite (d) d'intersection des deux plans (P) et (Q).
Les coordonnées des points $M(x;y;z)$ de la droite (d) vérifient le système d'équations : $\left\{\begin{array}{rl} x+y-z &= 1 \\ 3x+2y+z &= 4 \end{array}\right.$
On remplace soit x, soit y, soit z, par le paramètre k. Je choisis pour cet exemple $z=k$ et je résous le système à deux inconnues x et y.

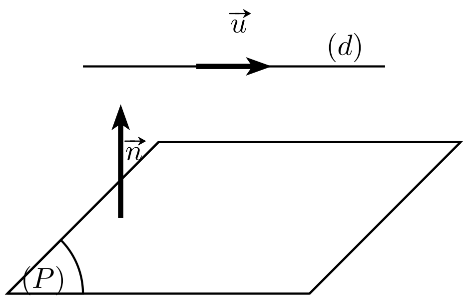
$$\left\{\begin{array}{ccc} x+y &=& 1+k \\ 3x+2y &=& 4-k \\ z &=& k \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} x &=& 1+k-y \\ 3(1+k-y)+2y &=& 4-k \\ z &=& k \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} x &=& 1+k-y \\ -y &=& 1-4k \\ z &=& k \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} x &=& 2-3k \\ y &=& -1+4k \\ z &=& k \end{array}\right.$$

On obtient ainsi la représentation paramétrique de la droite (d) d'intersection des deux plans.
On peut ainsi donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}(-3;4;1)$ de (d) et les coordonnées d'un point $A(2;-1;0)$ de (d) en faisant $k=0$ dans le système.

4.2 Droite parallèle à un plan

:

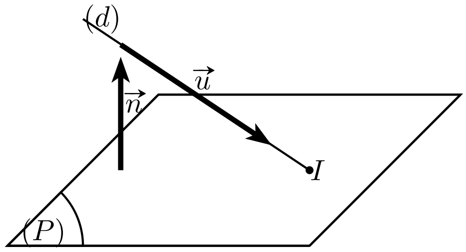
On donne $\vec{u}$, vecteur directeur de la droite (d) et $\vec{n}$, vecteur normal au plan (P).



La droite (d) est parallèle au plan $(P) \iff \vec{u}$ est orthogonal à $\vec{n}$.

4.3 Droite sécante à un plan

On donne $\vec{u}$, vecteur directeur de la droite (d) et $\vec{n}$, vecteur normal au plan (P).



La droite (d) est sécante au plan $(P) \iff \vec{u}$ n'est pas orthogonal à $\vec{n}$.

Exemple :
Soit (P), le plan passant par le point $A(-3;1;2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1;2;1)$ et (d) la droite passant par le

point $B(2;1;5)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(1;0;1)$.
Déterminer les coordonnées du point I, intersection de la droite (d) et du plan (P).

Solution :

- On s'assure d'abord que le plan et la droite se coupent.
- On détermine une équation catésienne du plan (P).
- On détermine une représentation paramétrique de la droite (d).
- On résout le système ainsi formé.

1. La droite coupe le plan en un point :
   En effet le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ n'est pas nul : $\vec{u}\cdot\vec{n} = 1\times 1 + 0\times 2 + 1\times 1 = 2$. Donc la droite (d) coupe le plan (P).
2. Équation cartésienne du plan (P) :
   (P) a une équation cartésienne de la forme $x + 2y + z + d = 0$ où d reste à déterminer.
   Les coordonnées du point $A(-3;1;2)$ doivent vérifier l'équation de (P). Donc $-3 + 2\times 1 + 2 + d = 0$ donne $d = -1$.
   Une équation cartésienne de (P) est : $\boxed{x + 2y + z - 1 = 0}$.
3. Représentation paramétrique de la droite (d) :
   $\left\{\begin{array}{rcl} x-2 &=& 1\times k \\ y-1 &=& 0\times k \\ z-5 &=& 1\times k \end{array}\right.$ avec $k\in\mathbb{R} \iff \boxed{\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+k \\ y &=& 1 \\ z &=& 5+k \end{array}\right. \text{ avec } k\in\mathbb{R}}$.
4. Résolution du système suivant :
   $\left\{\begin{array}{l} x+2y+z-1=0 \\ \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+k \\ y &=& 1 \\ z &=& 5+k \end{array}\right. \end{array}\right.$

On remplace dans la première équation x, y et z par leurs valeurs en fonction du paramètre k.
On obtient : $2 + k + 2\times 1 + 5 + k - 1 = 0$ ce qui donne $k = -4$ et on remplace k par -4 dans le système qui est la représentation paramétrique de la droite. On obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2-4 \\ y &=& 1 \\ z &=& 5-4 \end{array}\right.$$

Les coordonnées du point I intersection de la droite (d) et du plan (P) sont $\boxed{I(-2;1;1)}$.

5 Rappels de quelques règles dans l'espace

1. Le plan (P) a pour vecteur normal $\vec{n}$ et le plan (P') a pour vecteur normal $\overrightarrow{n'}$.
   - $(P) \parallel (P') \iff \vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires.
   - $(P) \perp (P') \iff \vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux.

2. (D) est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et (P) le plan de vecteur normal $\vec{n}$.
   - $(D) \parallel (P) \iff \vec{n}\cdot\vec{u} = 0$.
   - $(D) \perp (P) \iff \vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

page 15 page 15

6 Plan médiateur d'un segment

Si on considère un segment $[AB]$ dans l'espace, il y a une infinité de médiatrices pour ce segment. Elles sont toutes situées dans un même plan. Ce plan est le **plan médiateur** du segment $[AB]$.

Voici deux méthodes pour déterminer une équation du plan médiateur d'un segment dont on connait les coordonnées des extrémités. Soit A de coordonnées $(2;1;-5)$ et B de coordonnées $(-4;3;-1)$ les extrémités du segment.

1. <u>Première méthode :</u>
   - On détermine les coordonnées du point I milieu du segment [AB] :
     $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{2-4}{2} = -1, \quad y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{1+3}{2} = 2$ et $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{-5-1}{2} = -3.$
     Donc I a pour coordonnées $(-1; 2-3)$.
   - Le plan, (P), médiateur du segment [AB] est le plan perpendiculaire à (AB) passant par I. Donc le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal au plan (P). Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(-6;2;4)$.
     Donc une équation de (P) est : $-6x + 2y + 4z + d = 0$.
     Pour déterminer d , il suffit de dire que les coordonnées du point I vérifient l'équation de (P) car I appartient à (P). Donc $6 + 4 - 12 + d = 0$ soit $d = 2$.
     Une équation de (P) est $-6x + 2y + 4z + 2 = 0$
2. <u>Deuxième méthode :</u>
   On dit qu'un point M de coordonnées $(x;y;z)$ appartient au plan (P) médiateur du segment [AB] si et seulement si MA=MB.
   MA=MB $\iff$ MA^2=MB^2 $\iff$ $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = (x+4)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2$.
   On développe et on réduit et on obtient une équation de (P) :
   $(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) + (z^2 + 10z + 25) = (x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 6y + 9) + (z^2 + 2z + 1) \iff$
   $-12x + 4y + 8z + 4 = 0$ ou $-6x + 2y + 4z + 2 = 0$. On retrouve l'équation précédente.